

ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ–БЕНАРА*

1. Введение

В работе рассматривается обратная (ретроспективная) задача о моделировании трехмерных медленных термоконвективных движений вязкой жидкости с плотностью и вязкостью, зависящими от температуры (обратная задача к задаче Рэлей–Бенара). Математическая модель процесса описывается квазистационарными уравнениями движения вязкой неоднородной несжимаемой жидкости, эволюционными уравнениями переноса плотности и вязкости, уравнением теплового баланса. Численный метод решения уравнений движения среды основан на введении двухкомпонентного векторного потенциала для скорости движения среды и применении метода конечных элементов со специальным базисом из трикубических сплайнов для расчета этого потенциала. Уравнения переноса решаются методом характеристик. Уравнение теплового баланса в обратном направлении времени решается вариационным методом, который фактически состоит в решении серии специально сконструированных прямых задач. В свою очередь, задача в прямом направлении времени решается методом продольно-поперечной прогонки с применением разностной схемы Кранка–Николсона по каждому из направлений. Алгоритмы численных расчетов ориентированы на применение компьютеров параллельного действия.

В работах [1, 2] представлен численный метод решения обратной задачи гравитационной неустойчивости в двумерном случае. В работе [3] разработан численный метод решения этой задачи в случае трех пространственных переменных. Однако в этих работах указан подход к решению обратной ретроспективной задачи без учета влияния тепловых полей и внутренних источников тепла, обусловленных вязким трением. В данной статье предлагается один из возможных подходов к решению задачи реконструкции в случае трех пространственных переменных с учетом тепловых эффектов. Некоторые геофизические приложения рассматриваемых задач описаны, например, в [1–3].

*Работа поддержана РФФИ (проекты №01-07-90210, 02-01-00354), а также программой поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН.

© А. И. Короткий, И. А. Цепелев, 2003

2. Описание модели и постановка задачи

В параллелепипеде $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, l_3) \subset \mathbb{R}^3$ рассматривается медленное конвективное движение вязкой неоднородной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Это движение описывается [4–6]: уравнением Стокса

$$\nabla p = \operatorname{div} (\mu e_{ij}) + \mathbf{F}, \quad (2.1)$$

уравнением несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 + \partial u_3 / \partial x_3 = 0, \quad (2.2)$$

уравнением теплового баланса

$$\rho_* c \partial T / \partial t + \rho_* c \langle \mathbf{u}, \nabla T \rangle = \operatorname{div} (k \nabla T) + \mu_* \Phi + \rho Q, \quad (2.3)$$

уравнением состояния для плотности

$$\rho(t, x) = \rho_*(t, x)(1 - \alpha(T(t, x) - T_S)), \quad (2.4)$$

реологическим уравнением для вязкости

$$\mu(t, x) = \mu_*(t, x) \exp \left(\frac{E + \rho_* g x_3 V}{RT} - \frac{E + \rho_S g l_S V}{RT_S} \right), \quad (2.5)$$

уравнениями переноса температурно-невозмущенных плотности и вязкости

$$\partial \rho_* / \partial t + \langle \nabla \rho_*, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \partial \mu_* / \partial t + \langle \nabla \mu_*, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор скорости; $\mathbf{F} = (0, 0, -g\rho)$ – вектор внешних массовых сил; g – ускорение свободного падения; p – давление; ρ – плотность; μ – вязкость; ρ_* – температурно-невозмущенная плотность; μ_* – температурно-невозмущенная вязкость; $e_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ – тензор скоростей деформаций; ∇ – операция взятия градиента; div – операция взятия дивергенции; T – температура; c – удельная теплоемкость; k – коэффициент теплопроводности; Q – плотность внутренних источников тепла; E – энергия активации; V – объем активации; R – газовая постоянная; α – коэффициент теплового объемного расширения; ρ_S, l_S, T_S – характерные значения для плотности, длины и температуры соответственно; Φ – генерация тепла из-за внутреннего трения,

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (1 + \delta_{ij}) e_{ij}^2, \quad \delta_{ij} \text{ – символ Кронекера.}$$

Уравнения (2.1)–(2.6) образуют полную систему уравнений для нахождения неизвестных функций $u_1, u_2, u_3, T, p, \rho, \mu$ независимых переменных t (времени) и $x = (x_1, x_2, x_3)$ (декартовых координат точки пространства).

Функция \mathbf{u} должна удовлетворять заданным граничным условиям, функция T – заданным граничному и начальному (финальному) условиям, функции μ_* и ρ_* – заданным начальным (финальным) условиям. Начальный момент времени для определенности положим равным нулю, финальный момент времени обозначим через ϑ .

На границе Γ области Ω для поля скоростей задаются или условие прилипания, или условие непротекания с идеальным скольжением.

Для температуры на каждой из граней параллелепипеда Ω будем рассматривать или граничное условие первого рода (условие Дирихле), или граничное условие второго рода (условие Неймана).

При решении задачи в обратном направлении времени задается температура в финальный момент времени

$$T(\vartheta, x) = T_\vartheta(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.7)$$

где T_ϑ – заданная в области Ω функция, характеризующая распределение температуры в финальный момент времени.

При решении задачи в обратном направлении времени для температурно-невозмущенных плотности и вязкости задаются финальные условия

$$\rho_*(\vartheta, x) = \rho_\vartheta(x), \quad \mu_*(\vartheta, x) = \mu_\vartheta(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.8)$$

где ρ_ϑ и μ_ϑ – заданные в области Ω функции, характеризующие распределение плотности и вязкости в финальный момент времени.

Обратная задача состоит в расчете функций $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$, $T = T(t, x)$, $\rho = \rho(t, x)$, $\mu = \mu(t, x)$, удовлетворяющих при $0 \leq t \leq \vartheta$ в области Ω уравнениям (2.1)–(2.6), а также заданным граничным и финальным условиям (2.7), (2.8).

При выполнении численных расчетов систему (2.1)–(2.6) удобно несколько упростить, воспользовавшись двухкомпонентным представлением векторного потенциала скорости движения среды

$$\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, 0), \quad (2.9)$$

а также выполнить операцию вихря над уравнением (2.1) (эта операция исключает давление из этого уравнения) с приведением соотношений (2.1)–(2.6) и искомых величин к безразмерному виду. Подробно это сделано в работе [7].

Методы решения прямых задач гравитационной неустойчивости и тепловой конвекции подробно рассматривались в работах [7–11]. Далее опишем численный алгоритм решения обратной ретроспективной задачи.

3. Схема расчета обратной ретроспективной задачи

Опишем кратко метод численного решения задачи. Для приближенного нахождения векторного потенциала скорости движения среды воспользуемся методом конечных элементов. Применение этого метода и построение базисных элементов подробно описано в [7–9].

Введем в области Ω равномерную прямоугольную сетку

$$0 = x_i^0 < x_i^2 < \dots < x_i^{n_i-1} < x_i^{n_i} = l_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

с узлами $\Omega_{ijk} = (x_1^i, x_2^j, x_3^k)$, $0 \leq i \leq n_1$, $0 \leq j \leq n_2$, $0 \leq k \leq n_3$. Каждому узлу сетки Ω_{ijk} поставим в соответствие трикубический базисный элемент $\omega_{ijk}^l = \omega_{ijk}^l(x_1, x_2, x_3) = \omega_i^{l1}(x_1)\omega_j^{l2}(x_2)\omega_k^{l3}(x_3)$, который является тензорным произведением соответствующих одномерных кубических базисных элементов. Для аппроксимации плотности и вязкости используются трилинейные базисные элементы $\phi_{ijk}(x) = \phi_i^1(x_1)\phi_j^2(x_2)\phi_k^3(x_3)$.

Аппроксимация векторного потенциала осуществляется комбинациями

$$w_l(t, x_1, x_2, x_3) \approx \sum_i^{n_1} \sum_j^{n_2} \sum_k^{n_3} w_{ijk}^l(t) \omega_{ijk}^l(x_1, x_2, x_3), \quad l = 1, 2,$$

плотность и вязкость приближаются трилинейными базисными элементами.

Нахождение коэффициентов w_{ijk}^l на каждом слое по времени сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной ленточной матрицей большой размерности.

Численное решение задачи разбивается на следующие основные этапы.

1. Решение системы линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов разложения векторного потенциала по базисным элементам. Решение этой системы находится итерационными методами сопряженных градиентов или блочными методами Зейделя (методами верхней или нижней релаксации). Более подробно конкретные реализации итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений подобной структуры для ЭВМ параллельного действия рассматривались в [10, 11].

2. Интерполяция поля скоростей. Благодаря использованию специальных базисных элементов удастся организовать эффективное вычисление поля скоростей на нужных сетках, используемых для нахождения плотности, вязкости и температуры. Точность интерполяции поля скоростей на достаточно гладких функциях имеет порядок $O(h^4)$, h – диаметр разбиения области Ω .

3. Решение уравнения теплового баланса в обратном времени.

4. Решение уравнений переноса температурно-невозмущенных плотности и вязкости в обратном направлении времени. Эти уравнения решаются методом характеристик [11].

Опишем вариационный метод решения обратной ретроспективной задачи для уравнения теплового баланса. Рассмотрим неотрицательный квадратичный функционал

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} |T(\vartheta, x; \varphi) - \chi(x)|^2 dx,$$

где $T(\vartheta, \cdot; \varphi)$ – решение прямой задачи (2.3) в финальный момент времени ϑ , соответствующее некоторому (пока неизвестному) начальному распределению температуры $\varphi = \varphi(\cdot)$; $\chi(\cdot) = T(\vartheta, \cdot; T_0)$ – известное распределение температуры в конечный момент времени при начальном распределении $T_0 = T_0(\cdot)$. Будем искать минимум этого функционала по аргументу φ . Наименьшее нулевое значение функционала достигается на элементе $\varphi = T_0$:

$$J(T_0) = 0.$$

Нахождение минимума можно осуществить градиентным методом (см., например, [12]). Можно показать, что $J'(\varphi) = \Psi(0, \cdot)$, где Ψ – решение сопряженной задачи

$$\begin{cases} \partial \Psi / \partial t + \langle \mathbf{u}, \nabla \Psi \rangle = -\operatorname{div} (k \nabla (\Psi / \rho_* c)) + \alpha \Psi Q / c, \\ \sigma_1 \cdot (\Psi / \rho_* c) + \sigma_2 \cdot \partial (\Psi / \rho_* c) / \partial \mathbf{n} = 0, \\ \Psi(\vartheta, x) = 2(T(\vartheta, x; \varphi) - \chi(x)). \end{cases} \quad (3.1)$$

Градиентный метод сводится к построению последовательности приближений $\{\varphi^k\}$ по следующему правилу [12]:

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k - \gamma_k J'(\varphi^k), \quad \varphi^0 = T_S, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

$$\gamma_k = \min\{0.5; J(\varphi^k) / \|J'(\varphi^k)\|_{L^2(\Omega)}\}. \quad (3.3)$$

Опишем алгоритм численного решения уравнения теплового баланса в обратном направлении времени:

1) находим на промежутке времени $[0, \vartheta]$ решение прямой краевой задачи (2.3) с начальным распределением температуры φ^k , для этого используем метод продольно-поперечной прогонки с применением разностной схемы Кранка–Николсона по каждому из направлений [13, 14];

2) находим градиент $\Psi(0, \cdot)$ функционала J в точке φ^k , решая задачу (3.1) с $\varphi = \varphi^k$ по той же самой разностной схеме, что и в предыдущем пункте;

3) определяем значение параметра γ_k по формуле (3.3) и вычисляем новое значение φ^{k+1} по формуле (3.2);

4) если $\|\varphi^k - \varphi^{k+1}\| < \varepsilon$, расчет прекращается и φ^k принимается за аппроксимацию неизвестного начального состояния среды; если $\|\varphi^k - \varphi^{k+1}\| \geq \varepsilon$, то возвращаемся к первому шагу и проводим очередную итерацию (ε – параметр окончания итерационного процесса).

Таким образом, решение обратной ретроспективной задачи теплопроводности фактически сводится к решению серии прямых задач, которые, как известно, являются устойчивыми задачами [13, 14]. Выполнив преобразование искомой функции $T = \tilde{T} \exp(\lambda t)$ и выбрав число λ достаточно большим, всегда можно сдвинуть спектр задачи в область практической устойчивости.

Опишем кратко по шагам схему численного решения обратной задачи в целом. Зададим априори некоторое равномерное разбиение оси времени точками $t_n = \vartheta - \tau n$, $n \in \mathbb{Z}$, где τ – шаг разбиения. Далее организуется итерационный процесс по n , в котором n последовательно принимает целые значения от 0 до некоторого натурального числа $m = \vartheta/\tau$. На каждой итерации последовательно выполняются следующие три шага.

Шаг 1: по распределениям температуры $T = T(t_n, \cdot)$, температурно-возмущенных плотности $\rho_* = \rho_*(t_n, \cdot)$ и вязкости $\mu_* = \mu_*(t_n, \cdot)$, соответствующих моменту времени $t = t_n$, из равенств (2.4) и (2.5) находятся распределения температурно-возмущенных плотности $\rho = \rho(t_n, \cdot)$ и вязкости $\mu = \mu(t_n, \cdot)$, соответствующих этому же моменту времени $t = t_n$, затем из уравнений (2.1) и (2.2) с учетом соответствующих граничных условий находится распределение потенциала $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t_n, \cdot)$ и из равенства (2.9) – распределение поля скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t_n, \cdot)$.

Шаг 2: по распределениям поля скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t_n, \cdot)$, температурно-возмущенных плотности $\rho = \rho(t_n, \cdot)$ и вязкости $\mu = \mu(t_n, \cdot)$ из уравнения (2.3) с учетом граничных и финальных условий находится распределение температуры $T = T(t_{n+1}, \cdot)$, соответствующее моменту времени $t = t_{n+1}$.

Шаг 3: по распределениям поля скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t_n, \cdot)$, температурно-возмущенных плотности $\rho_* = \rho_*(t_n, \cdot)$ и вязкости $\mu_* = \mu_*(t_n, \cdot)$ из уравнений (2.6) находятся новые распределения температурно-возмущенных плотности $\rho_* = \rho_*(t_{n+1}, \cdot)$ и вязкости $\mu_* = \mu_*(t_{n+1}, \cdot)$, соответствующие моменту времени $t = t_{n+1}$.

Итак, после выполнения итерационного процесса будут получены распределения температуры $T = T(t_n, \cdot)$, потенциала $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t_n, \cdot)$, поля скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t_n, \cdot)$, температурно-возмущенных плотности $\rho_* = \rho_*(t_n, \cdot)$ и вязкости $\mu_* = \mu_*(t_n, \cdot)$, температурно-возмущенных плотности $\rho = \rho(t_n, \cdot)$ и вязкости $\mu = \mu(t_n, \cdot)$, соответствующие моментам времени $t = t_n$, $n = 0, \dots, m$. Имея эти распределения, с помощью интерполяции при желании можно восстановить картину процесса в целом на отрезке времени $[0, \vartheta]$ более детально. Шаг по времени выбирается автоматически так, чтобы максимальное смещение материальных точек среды не превосходило заданной достаточно малой величины. Для решения задачи в области, которая не является параллелепипедом, можно воспользоваться методом фиктивных областей [13] с основной расчетной областью в виде параллелепипеда.

4. Результаты расчетов модельных примеров

Пример 1. Рассмотрим движение неоднородной вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в параллелепипеде $\bar{\Omega} = [0, 3] \times [0, 3] \times [0, 1]$. Примем $T(t, x) = T_S$. В начальный момент времени $t = 0$ наклонный слой жидкости Ω_1 находился между двумя более вязкими и тяжелыми слоями, $\Omega_1 = \{x \in \Omega : -0.05x_1 + 0.15 < x_3 < -0.05x_1 + 0.35 + 0.03 \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2)\}$. В начальный момент времени считалось, что $\rho_0(x) = 0.85$ для $x \in \Omega_1$ и $\rho_0(x) = 1$ для $x \in \Omega/\Omega_1$, $\mu_0(x) = 1$ для $x \in \Omega_1$ и $\mu_0(x) = 100$ для $x \in \Omega/\Omega_1$.

Возмущения на поверхности разделов сред являются начальной фазой зарождающихся диапиров, которые будут развиваться во времени вследствие внутренней гравитационной неустойчивости этой системы. Для определенности ограничимся случаем граничных условий идеального скольжения с непроницаемостью. Для расчета выбиралась сетка $32 \times 32 \times 32$ при аппроксимации потенциала скорости и сетка $94 \times 94 \times 94$ при аппроксимации плотности и вязкости. Время расчета на десяти процессорах одной итерации по времени составляло 2 минуты на компьютере параллельного действия МВС-1000 с распределенной памятью (расчет векторного потенциала, поля скоростей, плотности и вязкости). В левом столбце рис. 1 показана эволюция жидкости в прямом времени. Изображенная поверхность представляет собой границу раздела между легкой и тяжелой жидкостью. В правом столбце рисунка показана обратная эволюция жидкости. Финальное состояние модели в прямой задаче принималось за начальное состояние в обратной задаче.

Пример 2. Рассмотрим движение жидкости в параллелепипеде $\bar{\Omega}$. В начальный момент $t = 0$ полагалось $\rho_*(\cdot) \equiv 1$, $\mu_*(\cdot) \equiv 1$, $T_0(x) = 1.1 - x_3/l_3$. На грани $\Gamma(x_3 = l_3)$ полагалось $T_2(t, x) \equiv 0.1$, на грани $\Gamma(x_3 = 0)$ считалось $T_1(t, x) \equiv 1.1$. Для простоты полагалось $Q = 0$ и рассматривался случай граничных условий идеального скольжения с непроницаемостью. Для уравнения теплового баланса на боковых гранях задавалось условие $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$. Чтобы вывести жидкость из состояния неустойчивого равновесия, в начальный момент времени в точке $x_0 = (3/2, 3/2, 1/3)$ задавалось некоторое малое тепловое возмущение, которое приводило к образованию диапира. При расчете использовались те же самые сетки, что и в предыдущем примере. Шаг по времени равнялся 0.1. В левом столбце рис. 2 показана эволюция жидкости в прямом времени. На кадрах изображены изотермы, соответствующие значениям температуры $T = 0.1$, $T = 0.4$, $T = 0.7$, $T = 1.0$ в соответствующие моменты времени. В правом столбце рисунка изображены изотермы, соответствующие тем же значениям температуры при расчете задачи в обратном направлении времени. Финальное состояние модели в прямой задаче принималось за начальное состояние для обратной задачи.

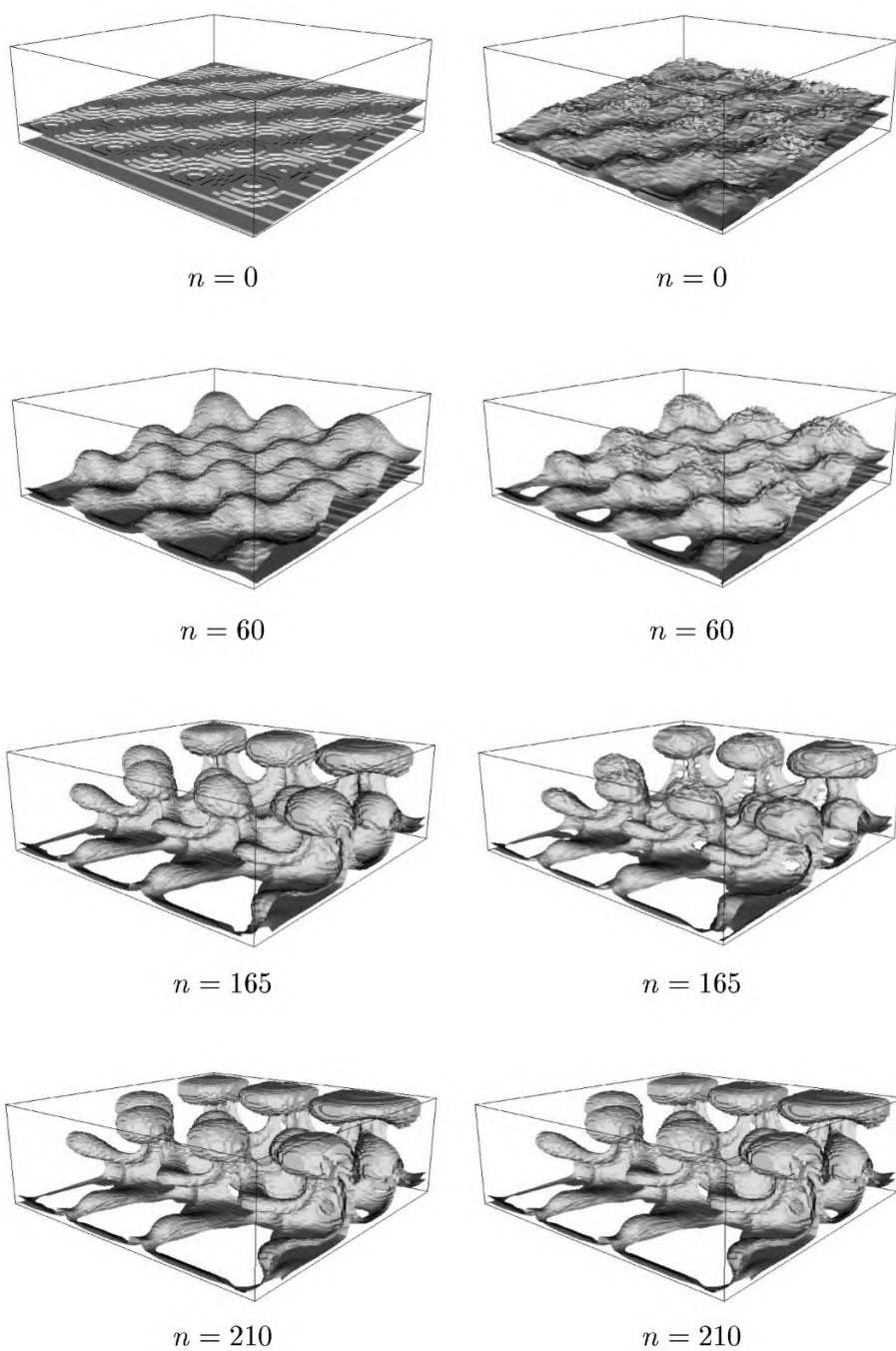


Рис. 1. Решение прямой и обратной задач гравитационной неустойчивости

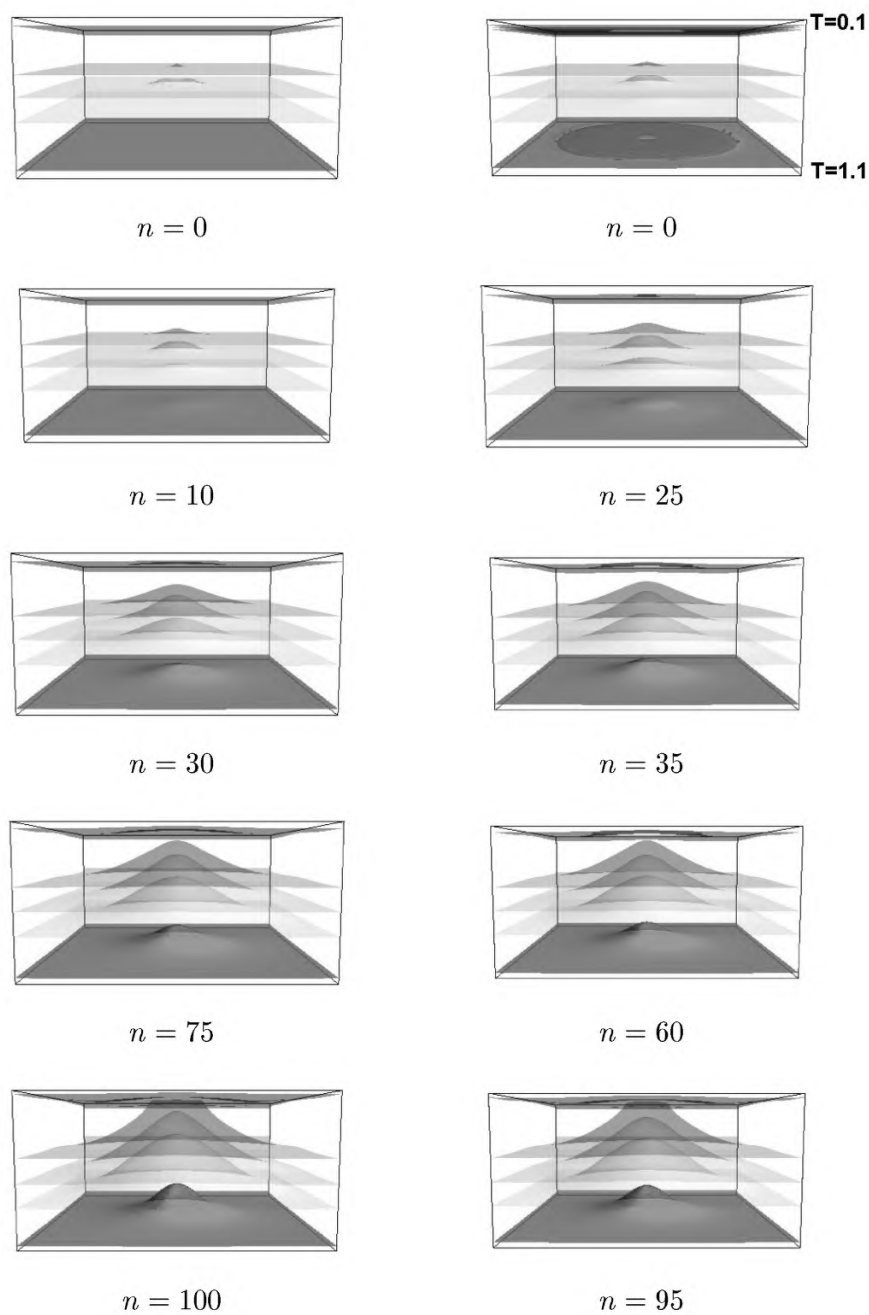


Рис. 2. Решение прямой и обратной задач тепловой конвекции

Литература

1. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., НАЙМАРК Б. М., ТЭЛБОТ К. Реконструкция истории движения среды: обратная задача гравитационной устойчивости // Вычисл. сейсмология. М.: Наука, 2000. Вып. 31. С. 52–61.
2. ISMAIL-ZADEN A. T., TALBOT C. J., VOLOZH YU. A. Dynamic restoration of profiles across diapiric salt structures: numerical approach and its applications // Tectonophysics. 2001. Vol. 337. P. 23–38.
3. КОРОТКИЙ А. И., ЦЕПЕЛЕВ И. А., ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т. и др. Трехмерное моделирование обратной задачи неустойчивости Рэлея–Тейлора // Изв. Урал. гос. ун-та. 2002. № 22. (Математика и механика. Вып. 4). С. 96–104.
4. CHANDRASEKHAR S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961.
5. ЛАНДАУ Л. Д., ЛИФШИЦ Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
6. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
7. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И., НАЙМАРК Б. М. и др. Численное моделирование трехмерных вязких течений под воздействием гравитационных и тепловых эффектов // ЖВМ и МФ. 2001. №9. С. 1399–1415.
8. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И., НАЙМАРК Б. М. и др. Реализация трехмерной гидродинамической модели эволюции осадочных бассейнов // Там же. 1998. №7. С. 1190–1203.
9. НАЙМАРК Б. М., ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И. и др. Численная реализация гидродинамической модели эволюции осадочных бассейнов // Тр. ИММ УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 142–172.
10. КОРОТКИЙ А. И., ЦЕПЕЛЕВ И. А., ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т. и др. Параллельные алгоритмы моделирования тепловой конвекции вязкой жидкости // Изв. Урал. гос. ун-та. 2000. №18. (Математика и механика. Вып. 3). С. 84–95.
11. КОРОТКИЙ А. И., ЦЕПЕЛЕВ И. А., ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т. и др. Параллельные алгоритмы моделирования движения неоднородной вязкой жидкости // Там же. 1999. №14. (Математика и механика. Вып. 2). С. 65–76.
12. ВАСИЛЬЕВ Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
13. МАРЧУК Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
14. ТИХОНОВ А. Н., САМАРСКИЙ А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

Статья поступила 01.07.2002 г.
Окончательный вариант 01.09.2002 г.